2. Lineární rovnice s jednou neznámou

Příklady

① Řeš v $\mathbb{R}$

a) $2(x+1)-8+x=0$ $\quad \mathcal{O}=\mathbb{R}$, $\mathcal{D}=\mathbb{R}$

$2x+2-8+x=0$

$3x-6=0 \quad /+6$

$3x=6 \quad /:3$

$x=2 \in \mathcal{D}$ $\quad \mathcal{K}=\{2\}$

b) $3x+6-\frac{1}{2}(6x+6)=0$ $\quad \mathcal{O}=\mathbb{R}$, $\mathcal{D}=\mathbb{R}$

$3x+6-3x-3=0$

$0x+3=0$

$0x=-3$

$(0=-3)$ NEPLATÍ $\quad \mathcal{K}=\emptyset$

c) $3(x+2)-\frac{1}{2}(6x+12)=0$ $\quad \mathcal{O}=\mathbb{R}$, $\mathcal{D}=\mathbb{R}$

$3x+6-3x-6=0$

$0x+0=0$

$0x=0$

$(0=0)$ PLATÍ $\quad \mathcal{K}=\mathcal{D}=\mathbb{R}$

d) $2(x+1)-2+x=0$ $\quad \mathcal{O}=\mathbb{R}$, $\mathcal{D}=\mathbb{R}$

$2x+2-2+x=0$

$3x+0=0$

$3x=0$

$x=0$ $\quad \mathcal{K}=\{0\}$

LINEÁRNÍ ROVNICE S JEDNOU NEZNÁMOU

- rovnice, které lze převést na tvar

$ax+b=0 \qquad a,b \in \mathbb{R} \qquad x \in \mathbb{R}$ neznámá

- DISKUZE ŘEŠENÍ (KOŘENŮ): podle koeficientů

$ax+b=0$

- $a=0$
  - $b \neq 0$: $0x+b=0$, $0x=-b$ — NEMÁ ŘEŠENÍ, $\mathcal{K}=\emptyset$
  - $b=0$: $0x+0=0$ — NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ, $\mathcal{K}=\mathcal{D}$
- $a \neq 0$: $ax+b=0$, $ax=-b$, $x=-\frac{b}{a}$ — 1 ŘEŠENÍ, $\mathcal{K}=\{-\frac{b}{a}\}$

[vyřešení - viz př. ①

$ax+b=0$

a) $3x-6=0 \Rightarrow x=\frac{6}{3}$

d) $3x+0=0 \Rightarrow x=\frac{0}{3}$

$\Big\} x=-\frac{b}{a}$

b) $0x+3=0$ nemá řeš.

c) $0x+0=0$ nekon. mn. řeš.]

- POZOR! NUTNÉ DÁVAT POZOR, V JAKÉ MNOŽINĚ MÁME ŘEŠIT!

Příklady

② Řeš a) v $\mathbb{N}$ b) v $\mathbb{Z}$

$\frac{x-2}{3}=\frac{3x+1}{2} \quad /.6$

$2(x-2)=3(3x+1)$

$2x-4=9x+3 \quad /-2x-3$

$-7=7x$

$7x=-7 \quad /:7$

$x=-1$

a) $\mathcal{O}=\mathbb{N}$, $\mathcal{D}=\mathbb{N}$

$x=-1 \notin \mathcal{D}$ $\quad \mathcal{K}=\emptyset$

b) $\mathcal{O}=\mathbb{Z}$, $\mathcal{D}=\mathbb{Z}$

$x=-1 \in \mathcal{D}$ $\quad \mathcal{K}=\{-1\}$

③ řešíme v $\mathbb{Z}$ (obor celých čísel)

a) $\frac{3y-1}{5} = \frac{1}{10}$ $\cdot 10$ $\quad \mathcal{O}=\mathbb{Z}$, $\mathcal{D}=\mathbb{Z}$

$2(3y-1) = 1$

$6y - 2 = 1$

$6y = 3 \quad :6$

$y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ $\quad \mathcal{K} = \emptyset$

b) DÚ $2 + \frac{y-1}{2} - y = 1$ $\cdot 2$ $\quad \mathcal{O}=\mathbb{Z}$, $\mathcal{D}=\mathbb{Z}$

$4 + y - 1 - 2y = 2$

$-y + 3 = 2 \quad -3$

$-y = -1 \quad \cdot(-1)$

$y = 1 \in \mathcal{D}$ $\quad \mathcal{K} = \{1\}$

④ řešíme v $\mathbb{R}$, provedu zkoušku

a) $2x\sqrt{3} - 7 = 0$ $\quad \mathcal{O}=\mathbb{R}$, $\mathcal{D}=\mathbb{R}$

$2x\sqrt{3} = 7 \quad :2\sqrt{3}$

$x = \frac{7}{2\sqrt{3}}$ VSHĚRNIT (odstr. odmocniny ze jmen.)

$x = \frac{7}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2 \cdot 3}$ (1 ve rozšíření zlomku) (podle pravidla)

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$

$x = \frac{7\sqrt{3}}{6} \in \mathcal{D}$ $\quad \mathcal{K} = \{\frac{7\sqrt{3}}{6}\}$

Zkouška:

$L = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{6}\sqrt{3} - 7 =$

$\frac{2 \cdot 7\sqrt{3}\sqrt{3}}{6_3} - 7 = \frac{7 \cdot 3}{3} - 7 = 7 - 7 = 0$

$P = 0$ $\quad L = P$

b) $x\sqrt{2} + 7 = x\sqrt{3} - 2$ $\quad \mathcal{O}=\mathbb{R}$, $\mathcal{D}=\mathbb{R}$

$x\sqrt{2} - x\sqrt{3} = -2 - 7$

vytkneme x

$x(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = -9 \quad :(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$x = \frac{-9}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ [VSHĚRNIT]

$x = \frac{-9}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{-9(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}$

$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$

$x = \frac{-9(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3} = \frac{-9(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1}$

$x = 9(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \in \mathcal{D}$ $\quad \mathcal{K} = \{9(\sqrt{2}+\sqrt{3})\}$

Zkouška:

$L = 9(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2} + 7 =$

$= 9\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + 7 =$

$= 9 \cdot \sqrt{2}\sqrt{2} + 9\sqrt{3} + 7 =$

$= 18 + 9\sqrt{3} + 7 = 25 + 9\sqrt{3}$

$P = 9(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{3} - 2 =$

$= 9\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) - 2 =$

$= 9\sqrt{3}\sqrt{2} + 9\sqrt{3}\sqrt{3} - 2 =$

$= 9\sqrt{6} + 27 - 2 = 25 + 9\sqrt{3}$

$L = P$

c) DÚ $x\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} - x$ $\quad \mathcal{O}=\mathbb{R}$, $\mathcal{D}=\mathbb{R}$

$x\sqrt{2} + x = \sqrt{3} + \sqrt{3}$

$x(\sqrt{2}+1) = 2\sqrt{3} \quad :(\sqrt{2}+1)$

$x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}$ VSHĚRNIT

$x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

$x = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}{2-1} = 2\sqrt{3}(\sqrt{2}-1) \in \mathcal{D}$

Zk. $L = 2\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{2} - \sqrt{3} =$

$= 2\sqrt{3}\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) - \sqrt{3} =$

$= 2\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{3} =$

$= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$

$P = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}(\sqrt{2}-1) =$

$= \sqrt{3} - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + 2\sqrt{3} =$

$= \sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$

$L = P$

⑤ řešte v $\mathbb{R}$

DÚ a) $x\sqrt{2} - \sqrt{3} = -(\sqrt{3} - x\sqrt{2})$ $\mathcal{O}=\mathbb{R}$ $\mathcal{D}=\mathbb{R}$

$x\sqrt{2} - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + x\sqrt{2}$

$0x = 0$

$(0 = 0)$

PLATÍ $\quad \mathcal{K} = \mathcal{D} = \mathbb{R}$

b) $5(2-x) = -5x - 7$ $\mathcal{O}=\mathbb{R}$ $\mathcal{D}=\mathbb{R}$

$10 - 5x = -5x - 7$

$0x = -17$

$(0 \neq -17)$

NEPLATÍ $\quad \mathcal{K} = \emptyset$

c) $\frac{4x-5}{2} = x - \left(\frac{5}{2} - x\right)$ $\mathcal{O}=\mathbb{R}$ $\mathcal{D}=\mathbb{R}$

odstr. záv.

$\frac{4x-5}{2} = x - \frac{5}{2} + x$

$\frac{4x-5}{2} = 2x - \frac{5}{2} \quad /\cdot 2$

$4x - 5 = 4x - 5$

$0x = 0$

$(0 = 0)$

PLATÍ $\quad \mathcal{K} = \mathcal{D} = \mathbb{R}$

d) $\frac{4x-5}{2} = x - (1-x)$ $\mathcal{O}=\mathbb{R}$ $\mathcal{D}=\mathbb{R}$

$\frac{4x-5}{2} = x - 1 + x$

$\frac{4x-5}{2} = 2x - 1 \quad /\cdot 2$

$4x - 5 = 4x - 2 \quad /+5-4x$

$0x = 3$

$(0 \neq 3)$

NEPLATÍ $\quad \mathcal{K} = \emptyset$

⑥ řešte v $\mathbb{R}$

a) $0{,}83l + 32 = 160 \quad /-32$ $\mathcal{O}=\mathbb{R}$ $\mathcal{D}=\mathbb{R}$

$0{,}83l = 128 \quad /\cdot 100$

$83l = 12\,800 \quad /:83$

$l = \frac{12\,800}{83}$

$\mathcal{K} = \left\{\frac{12\,800}{83}\right\}$

zk: $L = 0{,}83 \cdot \frac{12\,800}{83} + 32$

$= \frac{0{,}83 \cdot 128 \cdot 100}{83} + 32$

$= \frac{83 \cdot 128}{83} + 32 = 128 + 32$

$= 160$

$P = 160 \qquad L = P$

b) $x\sqrt{5} - \sqrt{5} = 5 \quad [\mathcal{O}=\mathbb{R}, \mathcal{D}=\mathbb{R}]$

DÚ

$x\sqrt{5} = 5 + \sqrt{5} \quad /:\sqrt{5}$

$x = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ USMĚR.

$x = \frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(5+\sqrt{5})\sqrt{5}}{5}$

$x = \frac{5\sqrt{5}+5}{5} = \frac{5\cdot(\sqrt{5}+1)}{5}$

$x = \sqrt{5}+1 \in \mathcal{D} \qquad \mathcal{K} = \{\sqrt{5}+1\}$

zk: $L = (\sqrt{5}+1)\sqrt{5} - \sqrt{5} =$

$= \sqrt{5}\sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 5$

$(\sqrt{5})^2 = 5$

$P = 5$

$L = P$

c) $5 - x\sqrt{3} = 2 \quad [\mathcal{O}=\mathbb{R}, \mathcal{D}=\mathbb{R}]$

DÚ

$-x\sqrt{3} = 2 - 5$

$-x\sqrt{3} = -3 \quad /\cdot(-1)$

$x\sqrt{3} = 3 \quad /:\sqrt{3}$

$x = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

$\mathcal{K} = \{\sqrt{3}\}$

$L = 5 - \sqrt{3}\sqrt{3} = 5 - 3 = 2$

$P = 2 \qquad L = P$

④ Řešte v $\mathbb{R}$

a) $-2(x+4) - 3(x+1)^2 = x(2-3x)$ $\quad [\mathcal{O}=\mathbb{R},\ \mathcal{D}=\mathbb{R}]$

$-2x - 8 - 3(x^2+2x+1) = 2x - 3x^2$

$-2x - 8 - 3x^2 - 6x - 3 = 2x - 3x^2 \quad (+3x^2)$

$-8x - 11 = 2x$

$-11 = 10x \quad / : 10$

$x = -\frac{11}{10} \quad (= -1{,}1) \in \mathcal{D}$ $\quad \mathcal{K} = \{-\frac{11}{10}\}$

b) $6 - \frac{3-2y}{5} \cdot 2 = 4y$ $\quad [\mathcal{O}=\mathbb{R},\ \mathcal{D}=\mathbb{R}]$

$6 - 2 \cdot \frac{3-2y}{5} = 4y$

$6 - \frac{2(3-2y)}{5} = 4y \quad / \cdot 5$

$30 - 2(3-2y) = 20y$

$30 - 6 + 4y = 20y \quad / -4y$

$24 = 16y \quad / : 16$

$y = \frac{24}{16}$

$y = \frac{3}{2} \in \mathcal{D}$ $\quad \mathcal{K} = \{\frac{3}{2}\}$

c) $\frac{x}{4} - \frac{5x+29}{16} = \frac{1}{2}x - 2 \quad / \cdot 16$ $\quad [\mathcal{O}=\mathbb{R},\ \mathcal{D}=\mathbb{R}]$

$4x - (5x+29) = 8x - 32$

$4x - 5x - 29 = 8x - 32$

$-x - 29 = 8x - 32 \quad / + x + 32$

$3 = 9x \quad / : 9$

$\frac{3}{9} = x$

$x = \frac{1}{3} \in \mathcal{D}$ $\quad \mathcal{K} = \{\frac{1}{3}\}$

d) $\frac{4-x}{2} - \left(\frac{2+7x}{8} - \frac{8-x}{6}\right) + \frac{x+2}{4} - \frac{8-x}{3} + x - 1 = 0$ $\quad [\mathcal{O}=\mathbb{R},\ \mathcal{D}=\mathbb{R}]$

$\frac{4-x}{2} - \frac{2+7x}{8} + \frac{8-x}{6} + \frac{x+2}{4} - \frac{8-x}{3} + x - 1 = 0 \quad / \cdot 24$ [nebo nejprve určit výrazy v závorce]

$12(4-x) - 3(2+7x) + 4(8-x) + 6(x+2) - 8(8-x) + 24x - 24 = 0$

$48 - 12x - 6 - 21x + 32 - 4x + 6x + 12 - 64 + 8x + 24x - 24 = 0$

$-12 \quad 24$
$-21 \quad 8$
$-4 \quad 6$
$-37x \quad 38x$

$x - 2 = 0$

$x = 2 \in \mathcal{D}$ $\quad \mathcal{K} = \{2\}$

e) $28 - 10x = 1 - \{6x - (9x+8) - 4[\frac{3}{2}x - (1-x)]\}$

$28 - 10x = 1 - \{6x - 9x - 8 - 4[\frac{3}{2}x - 1 + x]\}$ $\quad [\mathcal{O}=\mathbb{R},\ \mathcal{D}=\mathbb{R}]$

$28 - 10x = 1 - \{-3x - 8 - 4 \cdot \frac{3}{2}x + 4 - 4x\}$

$28 - 10x = 1 - \{-3x - 8 - 6x + 4 - 4x\}$

$28 - 10x = 1 - \{-13x - 4\}$

$28 - 10x = 1 + 13x + 4$

$28 - 10x = 5 + 13x \quad / + 10x - 5$

$23 = 23x$

$x = 1 \in \mathcal{D}$ $\quad \mathcal{K} = \{1\}$

POSTUPNÉ ODSTRAŇUJEME A UPRAVUJEME ZÁVORKY – ZAČÍNÁME U VNITŘNÍCH KULATÝCH, PAK HRANATÉ, NAKONEC SLOŽENÉ